

П. 7. Общие многошаговые методы. 07/04

Усп-а аппроксимации.

Методы Адамса и Тунга д/реш-а ЗК
явл-ся частн. случаями линейных много-
шаговых методов (ЛМКМ)

По-притенку $\neq$ ЗК:
$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(u), t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Стандарт. равномерн. сетка: $t_n = \tau n, n = 0, 1, \dots$
 $u(t_n)$ — знач-е иском. ф-ции в м. t_n , u_n —
сеточн. ф-ция ($u_n \sim u(t_n)$)

Общий вид ЛМКМ в таком случае име-
ет вид:
$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{n-j} = \tau \sum_{j=0}^k \beta_j f(u_{n-j})$$

Заметим, что в данном случае искомым
знач-м явл-ся u_n (в отличие от пред. слу-

чаев, в д искалось $\underline{u_{n+1}}$

Зам.1 $\alpha_0 = 0, |\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ (def)

Зам.2 Методы Адамса $\rightarrow$ в лев. час-
ти только 2 слагаемых, методы Тунга $\rightarrow$
 $\rightarrow$ в прав. части только 1 слагаемое

Исследовать погреш-ть аппр-ции ЛММ в
общ. виде. Погреш-ть аппр-ции (как уже
раньше неоднократно показывалось) ψ_n :
$$\psi_n = \underbrace{(Lu)_n}_{=0} - \underbrace{L_n u_n}_{=0} - (f)_n + f_n = L_n u_n + f_n$$

// Здесь (и только здесь) $u_n = u(t_n)$ //

III.0:
$$\psi_n = -\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^k \alpha_j u(t_{n-j}) + \sum_{j=0}^k \beta_j f(u(t_{n-j}))$$

1) Разложим $u(t)$ с центром в т. t_n по
членам по-ка $\tau^p, p > 0$

$$u(t) = \sum_{i=0}^p \frac{(t-t_n)^i}{i!} u^{(i)}(t_n) + O((t-t_n)^{p+1})$$

В предположении нулевой гладкости ф-
ции $u(t)$ и ограниче-ти производных
можно вычислить $u'(t)$; но $u'(t) = f(u(t)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(u(t)) = \dot{u} = u'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{(t-t_n)^{i-1}}{(i-1)!} u^{(i)}(t_n) + O((t-t_n)^p)$

② Подставим эти выражения в формулу для вычисления ψ_n .

$$U(t_{n-j}) = \sum_{i=0}^p \frac{(t_{n-j} - t_n)^i}{i!} U^{(i)}(t_n) + \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^{p+1});$$

$$f(U(t_{n-j})) = \sum_{i=1}^p \frac{(t_{n-j} - t_n)^{i-1}}{(i-1)!} U^{(i)}(t_n) + \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = - \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=0}^p \frac{(t_{n-j} - t_n)^i}{i!} U^{(i)}(t_n) \right) + \sum_{j=0}^k \frac{\underline{O}((t_{n-j} - t_n)^{p+1})}{\tau} \alpha_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^k \beta_j \left(\sum_{i=1}^p \frac{(t_{n-j} - t_n)^{i-1}}{(i-1)!} U^{(i)}(t_n) \right) + \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^p) = (*)$$

③ 1) $(t_{n-j} - t_n)^i = (\tau(n-j) - \tau n)^i = (-\tau j)^i = (-1)^i (\tau j)^i$

2) $(t_{n-j} - t_n)^{i-1} = (-1)^{i-1} (\tau j)^{i-1}$

3) $\sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{1}{\tau} \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^{p+1}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^p) = \underline{O}(\tau^p)$

$$\sum_{j=0}^k \beta_j \underline{O}((t_{n-j} - t_n)^p) = \underline{O}(\tau^p)$$

④ (*) $\Rightarrow \psi_n = - \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i (\tau j)^i}{\tau i!} U^{(i)}(t_n) +$

$$+ \sum_{j=0}^k \beta_j \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^{i-1} (\tau j)^{i-1}}{(i-1)!} U^{(i)}(t_n) + \underline{O}(\tau^p) =$$

$$= \sum_{j=0}^k \left[-\alpha_j \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i \tau^{i-1} j^i}{i!} U^{(i)}(t_n) + \beta_j \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^{i-1} \tau^{i-1} j^{i-1}}{(i-1)!} U^{(i)}(t_n) \right] + \underline{O}(\tau^p) =$$

$$\sum_{j=0}^k \left[-\alpha_j \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i \tau^{i-1} j^i}{i!} U^{(i)}(t_n) + \beta_j \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^i \tau^{i-1} j^{i-1} \cdot i}{i!} U^{(i)}(t_n) \right] + \underline{O}(\tau^p) =$$

Σ'-е переименуем i от $(i-1)!$, что позволено в Σ-е менять i от 0 $\Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^k \left[\sum_{i=0}^p \left[-\alpha_j \frac{(-1)^i \tau^{i-1} j^i}{i!} + \beta_j \frac{(-1)^i \tau^{i-1} j^{i-1} \cdot i}{i!} \right] U^{(i)}(t_n) \right] + \underline{O}(\tau^p)$$

$$+ \beta_j \frac{(-1)^i (-1)^{i-1} \tau^{i-1} j^{i-1} \cdot i}{i!} u^{(i)}(t_n) + O(\tau^p) =$$

$$= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^p \left[\frac{(-1)^i}{i!} (-\alpha_j \tau^{i-1} j^i - \beta_j i \tau^{i-1} j^{i-1}) u^{(i)}(t_n) \right] + O(\tau^p) =$$

$$= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \tau^{i-1} [\alpha_j j^i + \beta_j i j^{i-1}] u^{(i)}(t_n) + O(\tau^p) = (*)$$

// Поменяли местами порядок суммирования, минус внесли в $(-1)^{i-1}$ //

⑤ Почти окончательно:

$$(*) = \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^{i-1} \tau^{i-1}}{i!} \left[\sum_{j=0}^k \alpha_j j^i + \beta_j i j^{i-1} \right] u^{(i)}(t_n) + O(\tau^p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = \sum_{i=0}^p \left[\frac{(-1)^{i-1} \tau^{i-1}}{i!} u^{(i)}(t_n) A_i \right] + O(\tau^p), \text{ где}$$

$$A_i = \sum_{j=0}^k (\alpha_j j^i + \beta_j i j^{i-1}), i = \overline{0, p}$$

⑥ Тем самым получаем усл-я аппр-ции пор-ка τ^p : все $A_i \neq 0$: $\left[\sum_{j=0}^k (\alpha_j j^i + \beta_j i j^{i-1}) = 0, i = \overline{0, p}; (**) \right]$ и добавим усл. $\sum_{j=0}^k \beta_j = 1$ (точность ф-лы $g/f = \text{const}$)

Всего $(2+p)$ усл-й (ур-ний)

Неизвестных: $\alpha_j, \beta_j, j = \overline{0, k} \Rightarrow 2k+2$ неизвестных.

Тем самым доказана ∇ :

∇ Многочлен. линейн. метод имеет погреш-ть аппр-ции пор-ка $p \leq 2k$, когда вып-но (**)

Зам. If в (***) $i=0$, то имеем $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$. Тем самым базов. усл-я хотя бы какой-либо аппр-ции $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \sum_{j=0}^k \beta_j = 1$

Применим эту ∇ к исслед-ным погрешн. аппр-ции явных мет-в Адамса

Явный мет. Адамса имеет вид: $u_n - u_{n-1} = \tau \sum_{j=1}^k \beta_j f(u_{n-j})$

① В терминах общего вида МКМ это соотв.: $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$
 $\beta_0 = 0, \beta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \beta_k$

② Мет. Адамса основан на точной рав-ве $u_n - u_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt$ и на интерполяции ф-ции f полиномом $L_{n-1}(t)$ (явного ме-тода). Поэтому, if ф-ция f есть поли-ном степени не больше $(n-1)$, то метод Адамса точен

③ Используем ② след. образом. Пусть $u(t) = t^i$ - точное реш-е, $i = 0, k$. Если соотв. правая часть $f = u'(t) = it^{i-1}$, $i = 0, k-1$ (полиномы степени не выше $(k-1)$) $\Rightarrow$ на реш-ях вида

$u(t) = t^i, i = \overline{0, k}$, методы Адамса точные, а, значит, пор-к аппр-ции $\psi_n = 0$!

(Н) Тем самым: $0 = \psi_n = \sum_{j=0}^k \beta_j f(u_{n-j}) - \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^k \alpha_j u(t_{n-j}) =$ подстановка: $u(t) = t^i, f(t) = i t^{i-1}$ $= \sum_{j=0}^k [\beta_j i (t_{n-j})^{i-1} - \frac{1}{\tau} \alpha_j (t_{n-j})^i] = \sum_{j=0}^k [\beta_j i (\tau(n-j))^{i-1} - \frac{1}{\tau} \alpha_j (\tau(n-j))^i] = \psi_n = 0$

Это верно д/всех $i = \overline{0, n-1}$ и всех n .
 Положим $\psi = 0$. $\sum_{j=0}^k [\beta_j i (-\tau j)^{i-1} - \frac{1}{\tau} \alpha_j (-\tau j)^i] = 0$
 $\Leftrightarrow \sum_{j=0}^k (-\tau)^{i-1} [i \beta_j j^{i-1} + \alpha_j j^i] = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0 = \sum_{j=0}^k [i \beta_j j^{i-1} + \alpha_j j^i], i = \overline{0, k}$ — усл-е из ∇

Здесь k играет роль p в ∇ об порядке аппр-ции $\Rightarrow$ пор-к аппр-ции $p \geq k$

Тем самым показано, что д/рассмотренных явных мет-в Адамса (k -шаговых) выполнены усл-я ∇ и пор-к аппр-ции $p \geq k$

Зам. 1 Можно показать, что пор-к аппр-ции в точности $= k$.

Зам. 2 Я/ неявн. мет-в Адамса пор-к аппр-ции не ниже $k+1$